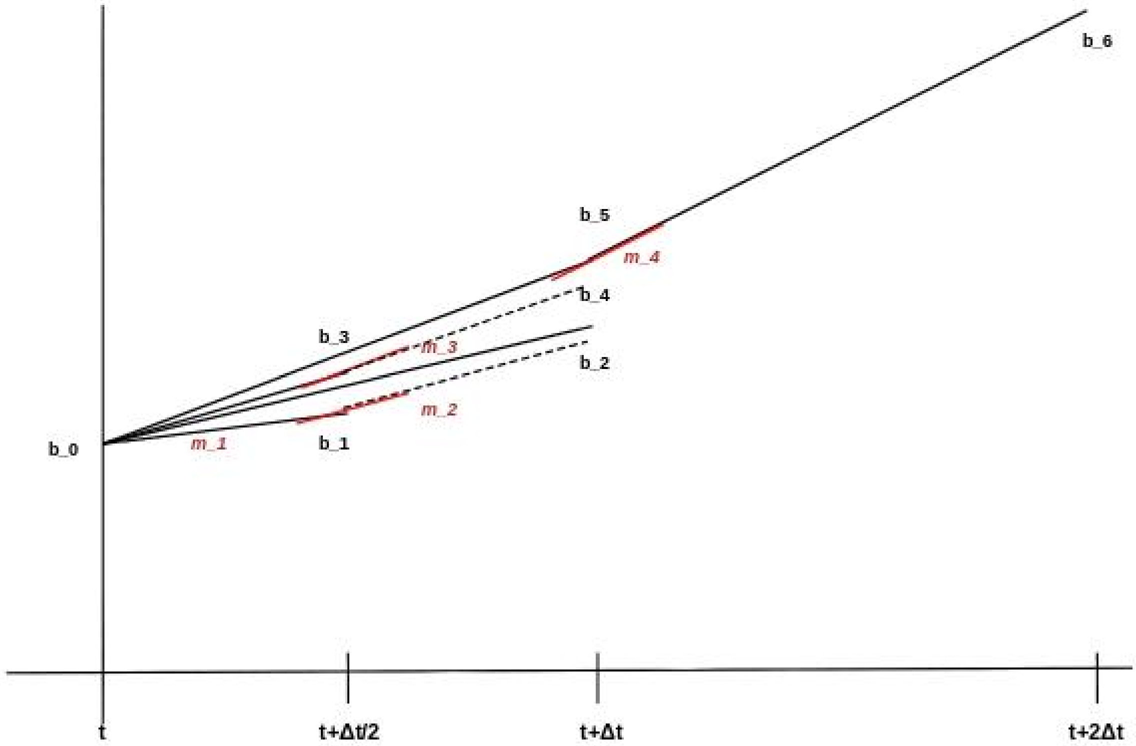

Berechnet werden zunächst die b_* - Werte und daraus dann die weiteren Änderungsraten. b_0 ist der Bestandswert am Beginn des Intervalls

m1 ist die Steigung (Änderungsrate) an der aktuellen „Stelle“ also dem aktuellen Zeitpunkt im Simulationsverlauf, der im Bild zum Koordinatenschnittpunkt gehört. Sie wird durch die vorgegebene Änderungsfunktion auf der Basis des aktuellen Zustandswertes berechnet.

Berücksichtigen Sie, dass üblicherweise nicht nur eine Bestandsgröße (Bestandsfaktor) vorhanden ist, sondern mehrere, so dass es zu jedem eine Änderung gibt, die jeweils aus den in den Flüssen (Flussfaktoren) definierten Termen (Funktionen) zu berechnen sind[1].

Für den Wert b_1 kann mit dem aktuellen Zustandswert einfach nach Euler mit der Änderungsrate m1 der neue Wert errechnet werden:
B als Symbol für den Bestand, B' als Symbol für die Änderungsrate, dann ist

B(t+Δt/2)	=	B(t)	+	B'(t)	*	Δt/2
b_1	=	b_0	+	m1	*	Δt/2

neuer Wert = alter Wert plus Änderungsrate am Beginn mal Zeitdifferenz bis t+Δt/2

Darin ist Δt die Zeitdifferenz für den aktuellen Simulationsschritt.

Nun kann die Änderungsrate m2 für den (eigentlich fiktiven) Zwischenschritt zum Zeitpunkt t+Δt/2 und dem Zwischenwert b_1 errechnet werden. Dazu benötigen wir den Zielwert b_2 und berechnen nun:
m2 = (b_2 – b_1) * 2.0 / Δt (Zuwachs geteilt durch Δt/2)

Mit diesem m2 und dem Ausgangswert können wir nun den neuen Wert b_3 von b_0 ausgehend direkt errechnen:

1 Wichtig ist dabei, die neuen Werte erst nach der Berechnung aller Bestandswerte in die Bestände zu übernehmen, da sonst für die einzelnen Berechnungen keine Gleichzeitigkeit gewährleistet ist.

$b\_3 = b\_0 + m2 * \Delta t/2$

An dieser Stelle gehen wir anschließend genau so vor wie an der Stelle b_1 und berechnen den neuen Wert b_4. Er definiert uns die neue Änderungsrate m3.
$m3 = (b\_4 - b\_3) * 2.0 / \Delta t$ (Zuwachs geteilt durch Δt/2)

Mit diesem m3 berechnen wir nun direkt den Wert b_5.
$b\_5 = b\_0 + m3 * \Delta t$
also mit dem Schritt zum Ende des Simulationsintervalls.

An dieser Stelle (t+Δt) berechnen wir mit dem aktuellen Wert b_5 nun die neue Änderungsrate, die zum außerhalb des aktuellen Simulationsschritts liegenden b_6 führen würde:

B(t+2*Δt)	=	B(t+Δt)	+	B'(t+Δt)	*	Δt
b_6	=	b_5	+	m4	*	Δt

Dies sind alles Vorarbeiten, die uns die Werte liefern, um die schließlich tatsächlich für den Simulationsschritt verwendete Änderungsrate m zu berechnen:

$$m = (m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4) / 6$$

Das ist der gewichtete Mittelwert mit einer stärkeren Gewichtung auf den mittleren m-Werten.

Was soll das?

In das Bild ist ein möglicher Kurvenverlauf des Bestands nicht eingezeichnet. Es ist aber von einem steigenden links gekrümmten Verlauf ausgegangen, wie er beispielsweise bei einem exponentiellen Anstieg zu beobachten ist.
Dann wird der Wert m1 typischerweise den wirklichen Anstieg unterschätzen, während m2 ihn eher überschätzt, da bei einem solchen Verlauf der Anstieg im weiteren Verlauf bereits größer ist.
m3 berücksichtigt insbesondere die Stärke des Anstiegs bei größeren Bestandswerten und hat dadurch einen vorausschauenden Einfluss. Das geht für die weitere Sicht durch m4 ein.
Die Gewichtung der Werte scheint die inneren stärker zu berücksichtigen. Dafür gehen aber die Randwerte (allerdings mit unterschiedlichem Bestand) jeweils in zwei Simulationsschritte ein, so dass alle m-Werte im Prinzip gleich behandelt werden.
Insgesamt ist die Wirkung, dass man sich bei der Simulation mit Runge-Kutta besser auch an schwierigere Verläufe anpassen kann[1].

Diskrete Simulation

Aber Achtung! Runge-Kutta darf nicht bei Vorgängen verwendet werden, bei denen die Wachstumsschritte aus zwingend diskreten Einzelschritten bestehen, wie beispielsweise bei normaler Verzinsung.

Demo-Programme

Zu einem Vergleich der Vorgehensweise bei den Simulationsmethoden empfehle ich die Demo-Programme herunter zu laden und zu starten.

1 Testen Sie die Simulation für einen sinusförmigen Verlauf einmal mit dem einfachen Euler-Verfahren und dann im Vergleich mit dem Runge-Kutta-Verfahren aus.